EXERCICE N°5 : **5 points**

A tout entier naturel $n \geq 1$, on associe la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\ln^n x}{x^2}$. ζ_n : courbe de f_n dans un repère orthogonal unité (1 cm, 10 cm)

1) a) Etudier suivant la parité de n : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

2) Dresser les tableaux de variations des fonctions f_1 et f_2.

3) a) Etudier la position relative des courbes ζ_1 et ζ_2.

b) Tracer dans le même repère ζ_1 et ζ_2.

4) Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = f_n\left(\sqrt{e^n}\right)$. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$.

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

6) a) Montrer que $\forall x > 0$ on : $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$.

b) En déduire que : $\forall x > 0$: $e^{\frac{x}{x+1}} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq e$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} e^{\frac{-1}{n+1}} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.

c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} e^{-\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}} \leq \frac{u_n}{u_1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{n} \leq \frac{u_n}{u_1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn